УДК 519.95:330.115:531:62.50

Коломійчук Олег Петрович
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник відділу проблем механіки та теорії керування
Інститут математики НАН України
Kolomiichuk Oleg
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Researcher of the Department of Problems Mechanics and Control Theory
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
ORCID: 0009-0000-1173-7399

DOI: 10.25313/2520-2294-2025-2-10681

ІНШЕ

КЕРУВАННЯ БАГАТОПРОДУКТОВОЮ ЕКОНОМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ

MANAGING A MULTI-PRODUCT ECONOMIC SYSTEM

Анотація. *Вступ. В роботі розглядається матрична математична модель другого порядку, яка зводиться до лінійної математичної моделі. Ця модель описує економічну систему багатопродуктової економіки, враховуючи зовнішні і внутрішні інвестиції в економіку. Для моделі ставиться задача керування. Модель приводить до нетрадиційної задачі керування динамічною системою, так званої неокласичної [1]. У такій постановці застосовується інформація про матриці при старших похідних.*

Мета. Метою роботи є ілюстрація застосування математичного апарату теорії керування, який було розвинуто для майже консервативних динамічних систем автором та його колегами до економічної моделі другого порядку економічної системи, яка зводиться до лінійної математичної моделі багатопродуктової економіки, ця модель враховує зовнішні і внутрішні інвестиції в економіці[2–3]. Така модель приводить до нетрадиційної задачі керування динамічною системою, так званої неокласичної[1]. У такій постановці застосовується інформація про матриці при старших похідних. Також в моделі враховано запізнення та взаємний вплив інвестування в різних галузях і відхилення від балансу, яке залежить від приросту продукції різних галузей.

Матеріали і методи. Матеріалами дослідження є праці вітчизняних та зарубіжних авторів, що проводять свої науково-практичні дослідження у математичному моделюванні та теорії керування для економічних систем.

В процесі здійснення дослідження було використано наступні наукові методи: методи теорії керування та спостереження, методи матричного аналізу, методи спостереження, методи лінійного та оптимального керування, метод функції Ляпунова.

Результати. Зведено математичну модель другого порядку економічної системи до форми Коші та показано як застосовувати теорію керування для побудови оптимального керування економічної моделі. Наведено приклади застосування теорії.

Перспективи. В подальших наукових дослідженнях пропонується: зосередити увагу на специфіці економічних моделей дослідити їх матричну структуру, відшукати можливість спростити обчислення за рахунок математичної моделі яка досліджується, розробити відповідні алгоритми керування та аналізу економічною моделлю, що розглядається в роботі.

Ключові слова: *лінійна математична модель багатопродуктової економіки, керування, динамічна система, вектор стану, матриця коефіцієнтів.*

Summary. *Introduction. This paper examines a second-order matrix mathematical model, which is reduced to a linear mathematical model. This model describes the economic system of a multi-product economy, taking into account both external and internal investments in the economy. A control problem is posed for the model. The model leads to a non-traditional control problem for a dynamic system, known as a neoclassical one. In this approach, information about matrices with higher derivatives is used.*

Objective. The aim of this work is to illustrate the application of the mathematical apparatus of control theory, which has been developed for nearly conservative dynamic systems by the author and his colleagues, to the economic model of the second order of the economic system, which is reduced to a linear mathematical model of a multi-product economy. This model takes into account both external and internal investments in the economy. Such a model leads to a non-traditional control problem *for a dynamic system, known as neoclassical. In this formulation, information about matrices with higher derivatives is used. The model also takes into account delays and mutual influences of investments in different sectors and deviations from balance, which depend on the growth of production in various industries.*

Materials and Methods. The materials of the research include the works of domestic and foreign authors conducting scientific and practical research in mathematical modeling and control theory for economic systems.

During the research, the following scientific methods were used: control and observation theory methods, matrix analysis methods, optimal control construction methods, and methods of linear and optimal control. The Lyapunov function method was also used.

Results. The second-order economic model of the economic system was reduced to the Cauchy form, and it was demonstrated how control theory can be applied to build optimal control for the economic model. Examples of the application of the theory were presented.

Perspectives. Further research will focus on the specifics of economic models, studying their structure. The possibility of simplifying mathematical calculations through the mathematical model under investigation is proposed.

Key words: *linear mathematical model of a multi-product economy, control, dynamic system, state vector, coefficient matrix.*

Постановка проблеми. Математичне моделювання є потужним інструментом і активно застосовується в різних галузях: в проектуванні нової техніки, в наукових дослідженнях та практичній і господарській діяльності сучасних підприємств для опису, аналізу та прогнозування процесів, які можна описати за допомогою математичних рівнянь, формули та масиви даних різної, інколи навіть, непередбачуваної структури. При цьому давши наглядну оцінку отриманим результатам можливо ефективно керувати реальними підприємствами і економічними процесами.

Математичні моделі дуже широко використовуються для прогнозування економічних тенденцій, аналізу ризиків, оптимізації інвестицій та фінансових операцій. Є багато різних підходів, наприклад, модель попиту та пропозиції, аналіз динаміки цін на ринки і багато різних прикладів застосування математики в економіці.

Ринкові відносини спонукають до ефективного застосування новітніх технологій для керування підприємствами, установами, а також секторами економіки. Ефективне керування реальними процесами можливе використовуючи потужний апарат теорій керування і спостережуваності систем. Теорія спостережуваності є цікавим напрямком і самостійним розділом в теорії керування. Вона направлена на відновлення невідомої частини вектору або всього вектору стану системи в математичній моделі. Ця задача розв'язується будуючи, так звані, фільтри для динамічної системи. Це можуть бути фільтри повного порядку, фільтр Калмана або фільтр Луінбергера[2]. Відомим є факт, що математичні задачі керування і спостереження є дуальними задачами. Це означає наступне: розв'язавши задачу керування для якоїсь економічної моделі ми автоматично отримуємо розв'язок задачі спостереження для дуальної моделі цієї ж системи. Звісно ж маючи математичну систему, перед побудовою керування важливо перевірити систему на керованість (спостережуваність). Іншими словами якщо система керована(спостережна) тільки тоді можливо побудувати керування, або відновити її стан відповідно, тобто розв'язати задачу в більш широкому розумінні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Робота Коломійчука О.П [1] описує задачу і формулює напрямок досліджень. В роботі описується модель та виконується постановка економічної задачі. Значний внесок в лінійні оптимальні системи керування вніс Х. Квакернак та Р. Сиван [2]. У своїх роботах вони описали загальну фундоментальну теорію яка використана у цій роботі. Х. Квакернак та Р. Сиван в своїх роботах дають аналіз лінійних систем керування, описують оптимальні лінійні системи керування, системи із зворотним зв'язком, також описують оптимальне лінійне відновлення системи та спостережники. Роботи цих вчених є фундаментальними в напрямку керування та спостереження. О. А. Жуковська, В. В. Новицький [3] розглядають традиційну задачу керування економічною системою і так звану неокласичну задачу у якій використовується інформація про старші похідні. Важливо що не повністю керована динамічна система у класичному випадку може стати керованою у певному сенсі при наявності додаткової інформації про старші похідні. Новицький В. В., Хуан Чень. в [4] описують оптимальне керування майже консервативними динамічними системами наводять алгоритми побудови такого керування для механічних і гіроскопічних систем. В роботі [5] наводиться аналіз динаміки розвитку малих підприємств за умови одержаного одноразового кредиту з урахуванням заданих умов подання та погашення з узагальненням моделі шляхом пов'язаного з кон'юнктурою ринку. В [6] розглянуто напрямки управління економічною стійкістю торговельного підприємства в контексті попередження виникнення кризових явищ та процесів у його функціонуванні. Визначено, що для сучасних торговельних підприємств доцільно розробляти стратегію управління економічною стійкістю на основі збалансованої системи показників. [7] присвячена використанню методів, що базуються на робастному підході при побудові систем з не чітко визначеними математичними моделями та неповною апріорною інформацією. Робота

[8] присвячена методам та особливостям керування системами управління навчальних курсів. Показано, що ефективність функціонування подібних систем залежить від підходу та архітектурних рішень, які задіяні при створенні системи. Запропоновано декілька різних підходів, в залежності від розміру системи та особливості її вмісту.

Метою роботи є ілюстрація застосування математичного апарату теорії керування, який було розвинуто для майже консервативних динамічних систем автором та його колегами до економічної моделі другого порядку економічної системи, яка зводиться до лінійної математичної моделі багатопродуктової економіки, ця модель враховує зовнішні і внутрішні інвестиції в економіці [3–4]. Така модель приводить до нетрадиційної задачі керування динамічною системою, так званої неокласичної [1]. У такій постановці застосовується інформація про матриці при старших похідних, також в моделі враховано запізнення та взаємний вплив інвестування в різних галузях і відхилення від балансу, яке залежить від приросту продукції різних галузей.

Матеріали і методи. Матеріалами дослідження є праці вітчизняних та зарубіжних авторів, що проводять свої науково-практичні дослідження у математичному моделюванні та теорії керування для економічних систем.

В процесі здійснення дослідження було використано наступні наукові методи: методи теорії керування та спостереження, методи матричного аналізу, методи побудови оптимального керування, методи лінійного та оптимального керування, метод функції Ляпунова.

Виклад основного матеріалу.

***Математична модель економічної системи* [3]:**

Нехай існують n виробництв з вектором доходів $Y \in \Re_n$, а також вектор заощаджень $S \in \Re_n$, який пропорційний вектору доходів $K \in \Re_n$ вектор обсягів основного капіталу. Вважаємо, що він також пропорційний вектору доходів, тоді:

$$S = HY \,, K = VY \,,\ I = V\dot{Y} = \dot{K} \tag{1}$$

Матриця $H \in \Re_{n\times n}$ — відома виробнича матриця, завдяки їй будується узагальнений (матричний) мультиплікатор $(E-H)^{-1}$, де E — одинична матриця, а матриця $V \in \Re_{n\times n}$ є узагальненим матричним акселератором. Матриці S та V є невід'ємними. $I \in \Re_n$ є вектором (внутрішніх, залежних від стану економіки) інвестицій.

Відхилення від умов балансу $I = S$, мають вигляд

$$I = S + L\dot{Y} = HY + L\dot{Y} \tag{2}$$

та

$$\dot{K} = I + K\dot{I} \,. \tag{3}$$

Матриця L характеризує запізнення та взаємний вплив інвестування в різних галузях, тобто L враховує запізнення в інвестиціях, тобто інвестиції складаються з двох компонент: частина, яка відповідає заощадженням і частина, яка залежить від змін доходу. Матриця K характеризує відхилення від балансу, яке залежить від приросту продукції різних галузей, тобто інвестиції складаються з двох компонент: частина, яка відповідає заощадженням, і частина, яка залежить від змін доходу.

В роботі [4] отримано математичну модель другого порядку:

$$KL\ddot{Y} - (V - L - KH)\dot{Y} + HY = 0 \,, \tag{4}$$

де при KL другій похідній є добутком двох матриць і характеризує відхилення від балансових умов (2) і запізнення у вкладенні інвестицій (3)

Модель у вигляді (4) описує динаміку економіки через взаємодію трьох основних елементів: доходів, заощаджень та капіталу. Маємо взаємозалежності, де заощадження і капітал пропорційні доходам, а інвестиції залежать від змін доходів, але також враховують запізнення (через матрицю L) і зворотний вплив змін капіталу на інвестиції. В результаті ці фактори взаємодіють через систему диференціальних рівнянь другого порядку. Модель дозволяє вивчати, як зміни в доходах та інвестиціях впливають на розвиток економіки, зокрема через зміни в обсягах основного капіталу. Врахування запізнень і зворотного впливу дозволяє отримати більш точну картину економічних процесів, що дозволяє прогнозувати можливі відхилення від рівноваги.

З метою застосування методів і алгоритмів теорії керування і спостережуваності систему другого порядку зводять до лінійної моделі у формі Коші. Це нескладна процедура, скориставшись якою, ми отримуємо модель у формі Коші. У зв'язку з тим що переважно алгоритми і методи розроблені саме для такої форми моделі, зведемо систему (4) до форми Коші.

Система (4) у формі Коші матиме вигляд:

$$\dot{y} = Ay \,, \tag{5}$$

де

$$y = [Y, \dot{Y}]^T \,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(KL)^{-1}H & (KL)^{-1}(V - L - KH) \end{pmatrix},$$

E — одинична матриця.

Приклад 1. Економічна модель з двома галузями економіки

Нехай маємо дві галузі з доходами:

$$Y = [Y_1, Y_2]^T \,;$$

матриця для заощаджень:

$$H = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix};$$

це означає, що 40% доходу першої галузі йде на заощадження в першій галузі, 20% доходу першої галузі йде на заощадження в другій галузі, і так далі;

матриця для капіталу:

$$V = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix};$$

це означає, що 50% доходу першої галузі інвестується в першу галузь, 10% — у другу, і так далі;

Для простоти, візьмемо матрицю, що враховує запізнення інвестицій таку:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Тобто інвестиції в кожній галузі мають однакові запізнення для кожної галузі.

Нехай $K = L$.

Тоді:

$$(KL)^{-1} H = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix},$$

$$(KL)^{-1}(V - L - KH) = \begin{pmatrix} -0,9 & -0,1 \\ -0,1 & -0,9 \end{pmatrix}$$

Остаточно матимемо:

$$\dot{y} = Ay,$$

де

$$y = [Y_1, Y_2, \dot{Y}_1, \dot{Y}_2]^T, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -0.2 & -0.9 & -0.1 \\ -0.2 & -0.9 & -0.1 & -0.9 \end{pmatrix}.$$

Таким чином завдяки отриманим результатам можливо зробити наступні висновки:

- Математична модель дозволяє вивчити взаємозв'язки між різними секторами економіки через матриці, які описують виробничі та інвестиційні процеси.
- Перетворивши систему до форми Коші у вигляді диференціальних рівнянь першого порядку, яка є лінійною модель може бути використана для аналізу динаміки змін в економіці. Такі системи можуть описувати короткотермінові коливання в доходах та інвестиціях між різними секторами економіки.
- Отримавши матрицю системи, яка описує динамічні взаємозв'язки між змінними і на її основі можна проводити подальші дослідження стійкості і реакцій економічних систем на зміни в параметрах.
- Матриця A відображає динаміку економіки, де елементи матриці показують, як зміни в одному секторі (наприклад, зміни в доходах впливають на інші змінні як доходи або інвестиції в інших секторах).
- Система рівнянь допомагає зрозуміти, які сектора економіки є більш чутливими до змін в доходах чи інвестиціях (наприклад, матриця показує, як зміни в одному секторі можуть впливати на зростання або падіння в іншому секторі через механізм мультиплікатора).
- Математичні моделі, подібні до цієї, можуть бути використані для прогнозування економічних процесів у реальному часі, оцінки ефектів змін у політиці (наприклад, зміни в податках або в державних інвестиціях) або для оцінки ефективності стратегій, спрямованих на стимулювання економічного зростання.
- Використовуючи цю модель, можна здійснити аналіз стійкості системи (наприклад, за допомогою власних значень матриці A). Це дозволяє зрозуміти, за яких умов економіка буде стабільною або нестабільною.
- Важливо також враховувати, як зміна параметрів (наприклад, змінні в матрицях V чи H) впливає на довгострокову стійкість економічної системи.

Після зведення системи (4) до форми Коші (5) можна застосовувати відомі методи для аналізу системи, а також будувати керування.

Аналіз системи рівнянь

Аналіз системи рівнянь передбачає наступні дослідження:

Перевірка стійкості системи. Щоб дослідити стійкість системи, треба знайти власні значення матриці A. Дослідження власних значень дають змогу визначити, чи система стійка (якщо всі власні значення мають від'ємні дійсні частини) або нестійка (якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину). Для цього необхідно розв'язати характеристичне рівняння матриці A яке відомо з матричного аналізу:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

де λ — власне значення матриці, а I — одинична матриця.

Визначення стійкості. Відомим є те що, якщо матриця A має лише від'ємні власні значення, то система буде стійкою, і всі змінні (доходи і інвестиції) будуть призводити до стійкого стану. Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, система нестабільна і може розходитися.

Маючи можливість змінювати параметри матриць H, V і L і спостерігати, як зміни в цих параметрах впливають на стабільність, стійкість і загальну динаміку математичної моделі економічної системи.

Прогнозування та чисельне рішення

Для прогнозування можна вирішити цю систему за допомогою чисельних методів, таких як метод Ейлера, Метод Рунге-Кутти або використання програмних засобів, таких як MATLAB, Python (бібліотека SciPy), Mathematica тощо.

Приклад 2. Приклад коду програми на мові програмування Python та бібліотеку SciPy(код програми створено за допомогою нейронної мережі):

```
import numpy as np
from scipy.integrate
import odeint import matplotlib.pyplot as plt
# Матриця A
A = np.array([[0, 0, 1, 0],
```

```
[0, 0, 0, 1],
[–0.4, –0.2, –0.9, –0.1],
[–0.3, –0.6, –0.1, –0.9]])
# Система диференціальних рівнянь
def system(y, t, A): return np.dot(A, y)
# Початкові умови
y0 = [1, 1, 0, 0]
# початкові значення для Y1, Y2, Z1, Z2
# Часовий інтервал t = np.linspace(0, 10, 100)
# Рішення системи solution = odeint(system, y0, t, args=(A,))
# Побудова графіка plt.plot(t, solution[:, 0], label="Y1 (доходи сектору 1)") plt.plot(t, solution[:, 1], label="Y2 (доходи сектору 2)") plt.plot(t, solution[:, 2], label="Z1 (інвестиції сектору 1)") plt.plot(t, solution[:, 3],
label="Z2 (інвестиції сектору 2)")
plt.legend() plt.xlabel("Час") plt.ylabel("Значення змінних")
plt.title("Динаміка економічної системи")
plt.show()
```

Висновки та оптимізація

На основі проведеного аналізу і виконаної роботи над чисельними результатами можна зробити важливі висновки:

Змінюючи параметри (наприклад, в матриці H) ми можемо впливати на стійкість і ефективність економічної системи.

Які параметри враховані в математичній моделі найбільше впливають на стабільність економіки.

Доповнивши модель певними параметрами робити висновки, які політичні чи економічні стратегії можна реалізувати завдяки дослідженням для забезпечення стійкого економічного зростання.

Керування для моделі економічної системи

Керування через вектор інвестиції для економічної системи. Можна ввести зовнішнє керування через вектор інвестицій $u(t)$, який впливає на зміну капіталу та доходів у кожній галузі. Таким чином, можемо записати:

$$I(t) = V\dot{Y} + u(t),$$

де $u(t)$ — це зовнішнє керування (вектор інвестицій або заощаджень), яким ми можемо впливати на систему шляхом змінювання в залежності від часу.

Відповідні зміни зробимо в рівнянні для інвестицій:

$$I = HY + L\dot{V} + u(t),$$

тут $u(t)$ — це вектор контролю, через який ми можемо керувати інвестиціями (наприклад, змінюючи заощадження або інвестиції в різних галузях).

Запізнення та взаємний вплив через L. Якщо L — це матриця запізнень, то її також можна зробити функцією часу або додати до неї керуючі параметри:

$$I = HY + L(t)\dot{V} + u(t).$$

Таким чином, можна вводити змінні параметри для $L(t)$, щоб маніпулювати ефектами запізнень.

Рівняння (4) нашої моделі з керуванням матиме наступний вигляд:

$$KL\ddot{Y} - (V - L - KH)\dot{Y} + HY + u(t) = 0 \qquad (6)$$

Після зведення (6) до форми Коші матимемо:

$$\dot{y} = Ay + Bu, \qquad (7)$$

де $y = [Y, \dot{Y}]^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(KL)^{-1}H & (KL)^{-1}(V - L - KH) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -KL^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для системи (5) можемо застосувати методи побудови керування(оптимального керування) описані в [2–4], це буває необхідно аби покращувати певні якості нашої моделі.

Пошук керування для економічної моделі (5), зокрема в такій динамічній системі, сформуємо через задачу оптимального керування. Також це можна зробити через задачу стабілізації системи.

Якщо, наприклад мета полягає в оптимізації певної економічної мети (максимізація прибутку, мінімізація витрат або стабілізація економіки), використаємо методи теорії керування.

При побудові керування для системи слід перевірити чи модель є керованою. У разі не керованості системи побудувати керування не можливо.

Оптимальне керування. Нехай маємо функцію вартості для моделі (5), яка описує витрати або прибутки J і ми маємо намір її мінімізувати, враховуючи керування $u(t)$. Функція вартості може виглядати наступним чином:

$$J = \int_0^T \left(\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u \right) dt + \Phi(x(T)) \qquad (8)$$

$x(t)$ — вектор стану системи (в нашому випадку)

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$u(t)$ — вектор керування,

Q, R — невід'ємні вагові матриці для стану та керування (вибираються на основі важливості кожної змінної),

$\Phi(x(T))$ функція вартості на кінцевому етапі (якщо є необхідність у додаткових умовах на кінцевий стан).

Наша мета — знайти таке керування $u(t)$, яке мінімізує J.

Будемо шукати керування у вигляді:

$$u(t) = -R^{-1} B^T P y(t), \qquad (9)$$

P — матриця розв'язок рівняння Ріккаті:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = \mathbf{0}, \qquad (10)$$

де Q — вагова матриця для стану,

R — вагова матриця для керування.

Отже для побудови оптимального керування для (7) слід визначити функцію вартості J, яку ми мінімізуємо і розв'язати рівняння Ріккаті, та використовуючи (9) визначити оптимальне керування. Це можливо за умови керованості системи.

Розв'язання (10) є складною математичною задачею, в [4] наводиться алгоритм розв'язку цієї задачі для майже консервативної динамічної системи. Випадок економічної моделі потребує додаткових досліджень і вдосконалення тих методів які вже розроблені. Якщо при моделюванні вдасться звести систему до вигляду вказаному в роботі [4], то можливо використати наведені методи. Якщо ж неможливо змоделювати систему відповідним чином, то варто застосовувати декомпозицію системи. Задачі розв'язання рівняння (10) будуть присвячені наступні роботи.

Керування для стабілізації. Коли метою дослідження є стабілізація економічної системи, доречно скористатись методами стабілізаційного керування, наприклад, керування зворотним зв'язком.

В такому випадку керування визначається через лінійне зворотне зв'язування від поточного стану системи:

$$u(t) = -Ky(t)) \qquad (11)$$

де K — матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку, яку треба вибрати таким чином, щоб система стабілізувалась. Для цього можна застосувати критерії стабільності. Зокрема, таку задачу розв'язують використовуючи метод Ляпунова. Необхідно обрати функцію Ляпунова і знайти матрицю K розв'язавши рівняння Ляпунова. Така задача є простішою в порівняні з задачею розв'язку рівняння Ріккаті.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Моделювання економічних процесів використовуючи математичний апарат і теорію керування через систему рівнянь дає чітке уявлення про взаємодії між секторами економіки і їх чутливість до змін.

– Математичні моделі допомагають передбачити наслідки економічних змін аналізувати і прогнозувати, що дозволяє ухвалювати обґрунтовані рішення.
– Задача створення моделей для прогнозування і аналітичного аналізу використовуючи сучасні технології та системи для моделювання економічних процесів є важливою частиною сучасної економічної науки.
– Вміння моделювати, керувати економічними процесами дає можливість бути передбачуваними і прогнозованими економічним системам.

В подальших наукових дослідженнях пропонується провести дослідження форми рівнянь математичної моделі. Ґрунтовне дослідження і форми рівнянь дасть змогу розвинути математичний апарат враховуючи специфіку економічних систем.

Література

1. Коломійчук О. П. Побудова керування для лінійної математичної моделі багатопродуктової економіки. *II Міжнародний конгрес: збірник матеріалів.* 2021.

2. Kwakernak H. Sivan B. Linear optimal control system. Wiley-Interscienc, A division of John Wiley & sonc, inc. New York, London, Sydney, Toronto, 1972.

3. Жуковська О. А., Новицький В. В. Неокласичні керовані системи лінійні моделі. Питання аналітичної механіки та її застосування. *Інститут математики НАН України.* 1999. Т. 26. С. 84–93

4. Новицький В. В., Чень Х. Оптимальне керування майже консервативними системами. *Зб. праць Інституту математики НАН Укаїни.* 2004. Т. 1, № 2. С. 152–157.

5. Рядно О. А., Шерстенніков Ю. В. Модель динаміки розвитку малого підприємства при використанні разового низько відсоткового кредиту. *Вісник ДДФА: Економічні науки*. 2007. № 1(17). С. 132–141.

6. Сарай Н. І. Стратегія управління економічною стійкістю торговельного підприємства. *Економіка та суспільство.* 2022. № 44.

7. Шпіт С. В., Мирнінко Н. В., Мойсеєнко А. В., Какотко А. В. Робастне керування з еталонним регулятором виходу. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління»*. 2014. № 1(24).

8. Іващенко Ол.-Д., Ульяницька К. Підходи до керування системами управління та розповсюдження навчальних курсів. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління».* 2024. № 2.

References

1. Kolomiichuk O. P. Construction of control for a linear mathematical model of a multi-product economy. *II International Congress: Collection of Materials*. 2021.

2. Kwakernak H., Sivan B. Linear optimal control systems. Wiley-Interscience, A division of John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, Toronto, 1972.

3. Zhukovska O. A., Novytskyi V. V. Neoclassical Controlled Systems: Linear Models. Questions of Analytical Mechanics and its Applications. *Institute of Mathematics, NAS of Ukraine*. 1999. Vol. 26. pp. 84–93.

4. Novytskyi V. V., Huang Chen. Optimal control of nearly conservative systems. *Collection of Works of the Institute of Mathematics, NAS of Ukraine.* 2004. Vol. 1, No. 2. pp. 152–157.

5. Riadno O. A., Shertstennikov Y. V. Model of the dynamics of small business development when using a one-time low-interest loan. *Bulletin of the DDFUA: Economic Sciences*. 2007. No. 1(17). pp. 132–141.

6. Sarai N. I. Strategy for managing the economic stability of trade. *Economics and Society*. 2022. No. 44.

7. Shpit S. V., Myrnynko N. V., Moyseienko A. V., Kakotko A. V. Robust control with a reference output regulator. *Interdepartmental Scientific and Technical Journal "Adaptive Systems of Automatic Control"*. 2014. No. 1(24).

8. Ivashchenko O.-D., Ulyanytska K. Approaches to control of management systems and dissemination of training courses. *Interdepartmental Scientific and Technical Journal "Adaptive Systems of Automatic Control"*. 2024. No. 2.