

УДК 330.4: 504.06

Онищенко Андрій Михайлович

*доктор економічних наук, професор,
професор кафедри інформаційних систем
та технологій*

*Київський національний університет
імені Тараса Шевченка*

ORCID: 0000-0003-3975-8946

Остапенко Олександр Петрович

*кандидат економічних наук, доцент,
начальник кафедри фінансового
забезпечення військ*

Військовий інститут

*Київського національного університету
імені Тараса Шевченка*

ORCID: 0000-0003-3194-0372

DOI: 10.25313/economics-2026-3-107-29

ДВОСЕКТОРНА ЕКОЛОГО- ЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВИТКУ В УМОВАХ СКОРОЧЕННЯ ЕМІСІЙ ПАРНИКОВИХ ГАЗІВ

Анотація. Вступ. Сучасний етап розвитку світової економіки характеризується посиленням уваги до проблем зміни клімату та зростання антропогенного впливу на навколишнє середовище. Основною причиною глобального потепління визнається підвищення концентрації парникових газів в атмосфері, що зумовлює необхідність пошуку ефективних механізмів їх скорочення. Наслідки кліматичних змін проявляються у вигляді екстремальних погодних явищ, деградації природних ресурсів та зниження ефективності економічної діяльності.

Міжнародна спільнота реагує на ці виклики через укладення глобальних угод, зокрема Кіотського протоколу та Паризької угоди, які передбачають обмеження викидів парникових газів. Реалізація таких угод потребує створення ефективних економічних механізмів, що поєднують інтереси економічного розвитку та екологічної безпеки.

У зв'язку з цим особливого значення набуває розвиток еколого-економічного моделювання, яке дозволяє формалізувати взаємозв'язки між економічною діяльністю та станом довкілля. Існуючі підходи, зокрема міжгалузеві, енергетичні та макроекономічні моделі, мають певні обмеження щодо комплексного врахування екологічних факторів.

Тому актуальним є створення моделей, які здатні одночасно враховувати динаміку виробництва, екологічні обмеження та інструменти економічної політики. Саме таким підходом є двосекторна еколого-економічна модель, яка дозволяє досліджувати взаємодію між виробничою та природоохоронною діяльністю в умовах обмежень на викиди.

Мета. Метою дослідження є розробка двосекторної еколого-економічної моделі оптимального розвитку економічної системи в умовах обмежень на викиди парникових газів. Особлива увага приділяється формалізації взаємозв'язку між економічним зростанням та екологічними обмеженнями.

У межах поставленої мети передбачається поєднання матеріального та екологічного балансів у єдиній динамічній моделі. Також метою є формулювання задачі оптимального керування, спрямованої на максимізацію інтегрального споживання.

Додатковим завданням є дослідження стаціонарних і магістральних траєкторій розвитку економічної системи. Отримані результати мають сприяти обґрунтуванню ефективної екологічної та економічної політики.

Матеріали і методи. Методологічною основою дослідження є системний підхід до аналізу еколого-економічних процесів. У роботі використано методи економіко-математичного моделювання, зокрема апарат теорії оптимального керування та динамічних систем.

Ключовим інструментом дослідження виступає двосекторна модель, що включає основне виробництво та допоміжний сектор з утилізації викидів. Для опису виробничих процесів застосовано виробничі функції неокласичного типу.



Авторське право © Автор(и).

Це стаття з відкритим доступом, що розповсюджується відповідно до умови ліцензії Creative Commons Attribution Ліцензія 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Динаміка системи задається диференціальними рівняннями, які описують зміну виробничих потужностей, обсягів випуску та рівня викидів. Оптимізаційна задача формулюється як задача максимізації інтегрального споживання.

Для отримання умов оптимальності застосовано принцип максимуму Понтрягіна. Інформаційною базою дослідження є наукові публікації, статистичні дані та матеріали міжнародних організацій.

Результати. У статті запропоновано двосекторну еколого-економічну модель оптимального розвитку національної економіки в умовах обмежень на емісію парникових газів. Модель поєднує матеріальний баланс виробництва та розподілу валового випуску з екологічним балансом утворення й скорочення викидів. Економічна система представлена основним виробництвом та допоміжним сектором, спрямованим на утилізацію емісій і реалізацію екологічних інвестиційних проєктів, у тому числі в межах міжнародних механізмів співпраці.

Оптимізаційна задача сформульована як задача теорії оптимального керування з критерієм максимізації інтегрального питомого споживання протягом планового періоду. Застосування принципу максимуму Понтрягіна дозволило отримати необхідні умови оптимальності, дослідити структуру гамільтоніана та визначити стаціонарні й магістральні траєкторії збалансованого зростання.

Отримані результати створюють формалізовану основу для аналізу компромісу між економічним розвитком і кліматичною політикою, розширюють інструментарій еколого-економічного моделювання та можуть бути використані при формуванні національних стратегій сталого розвитку відповідно до глобальних кліматичних зобов'язань.

Перспективи. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення моделі з урахуванням міжнародної торгівлі квотами на викиди. Перспективним є врахування невизначеності параметрів та використання нечітких моделей.

Також доцільним є застосування моделі для аналізу національних стратегій сталого розвитку. Розвиток підходу може включати багатосекторні моделі та інтеграцію з реальними статистичними даними.

Ключові слова: еколого-економічне моделювання, Паризька угода, теорія оптимального керування, магістральні траєкторії.

Постановка проблеми. Аналіз кліматичних змін переважно був зосереджений на вивченні змін температури повітря, атмосферних опадів, снігового покриву та стихійних гідрометеорологічних явищ за всю історію інструментальних спостережень. Отримані дані дають загальну картину потепління на планеті в цілому, перерозподілу випадіння опадів. Пов'язані з погодою та кліматом стихійні катаклізми стають причиною скорочення виробництва продукції, забруднення вод, поверхні землі, руйнування об'єктів економіки, інфраструктури. Розробка сценаріїв зміни клімату проводилась на основі найрізноманітніших підходів. З метою повного врахування всіх суттєво впливаючих на клімат факторів в розгляд було включено фізичні процеси, пов'язані з рівнем радіації, фотохімією, термодинамікою, випаровуванням, конденсацією і т.п. Більшість проведених досліджень зводяться до того, що основною причиною кліматичних змін є надмірна концентрація парникових газів в атмосфері Землі. Наявні дані низки спостережень [1] засвідчують той факт, що регіональні зміни клімату вже суттєво вплинули на ряд фізичних та біологічних процесів та систем. Приклади таких змін включають скорочення льодового покриття, танення вічної мерзлоти, зміна висоти розповсюдження рослинності, скорочення популяції певних видів рослин та тварин, посилення процесів спустинення. Антропогенні зміни фізичних та хімічних властивостей атмосфери володіють потенціалом безпосереднього впливу на якість життя і навіть на саме існування деяких її форм.

Разом з тим визнаним є факт економічних важелів впливу в питанні боротьби з екологічними негараздами як одних з найефективніших. Виходячи з даної тези, світова спільнота прийшла до створення першої міжнародної екологічної угоди — Кіотського протоколу [2], а згодом Паризької угоди [3], метою яких є поступове скорочення викидів парникових газів. Реалізація їх положень повинна спиратись в першу чергу на механізми найбільш економічно ефективних шляхів такого скорочення. Можливі варіанти переходу до екологічної економіки розглянуті ще в перших доповідях Римського Клубу. Побудова економічно ефективного та екологічно безпечного розвитку повинен сприяти покращенню соціального рівня, як одного з цільових орієнтирів економічної системи. Однак його реалізація пов'язана з низкою проблем фінансового, організаційного, інформаційного та іншого характеру, механізм якого необхідно ще розробити. Однією з таких спроб повинен стати перехід в наукових дослідженнях від концептуальної теорії до рівня еколого-економічного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема математичного моделювання взаємодії економіки та екології в рамках виконання положень Паризької угоди не є новою.

Першим класом таких моделей можна назвати моделі міжгалузевого балансу, які досліджують вплив структури економіки на навколишнє природне середовище. До даного класу моделей належать міжгалузева модель Леонтьєва-Форда та її узагальнення [4]. Еколого-економічне моделювання за схемою міжгалузевого балансу дозволяє визначити ціни, балансові фінанси галузей та економічні витрати на регулювання забруднення, прогнозувати вплив зміни доданої вартості на ціни, і відповідно, на обсяги виробництва за умови виконання тієї чи іншої природоохоронної стратегії. Основним недоліком даного класу моделей

є їх неспроможність представити вплив економічних інструментів скорочення викидів парникових газів на поведінку суб'єктів ринку.

Іншим класом моделей, які можна застосовувати для оцінки економічних наслідків від запровадження обмежень на викиди вуглекислого газу, є енергетичні моделі. Вони широко застосовуються для аналізу енергетичних ринків, оцінки прямих витрат на скорочення енергоспоживання та емісій парникових газів, можливостей субституції між енергоресурсами, зміни цін на енергетичні ресурси, прогнозування ціни дозволів на вуглецевих ринках, тощо. Як приклад, можна вказати на моделі Primes, Poles, Markal та їх численні модифікації [5]. Слід зазначити, що енергетичні моделі не можна застосовувати для оцінки загальноекономічних наслідків від запровадження обмежень на викиди парникових газів. Істотним недоліком моделей даного класу є обмежена можливість їх застосування для задач, які вимагають детального урахування міжгалузевих зв'язків.

Для розв'язання задачі дослідження можуть застосовуватися макроекономічні моделі, основані на теорії Кейнса. Найчастіше такі моделі використовують для дослідження рівноваги на окремих ринках, циклічних перетворень, конвергенції та стабільності, довгострокового зростання та прогнозування. В таких моделях не використовуються припущення щодо повної зайнятості первинних факторів виробництва та досконалої конкуренції на всіх ринках. Параметри макроекономічних моделей, як правило, оцінюються на базі часових рядів. Як приклад їх застосування для аналізу різних аспектів скорочення емісій парникових газів можна вказати моделі Oxford та Dri-Wefa [6].

В якості ще одного класу моделей можна вказати прикладні моделі загальної рівноваги. Їх істотною перевагою є те, що вони оперують значними масивами статистичних даних міжгалузевого балансу або системи національних рахунків і таким чином дозволяють максимально повно врахувати структур міжгалузевих зв'язків, а також досліджувати галузеві та макроекономічні ефекти економіки. На початку 90-х років XX ст. прикладні моделі загальної рівноваги стали стандартним інструментом аналізу наслідків від запровадження різноманітних механізмів економічної, соціальної енергетичної або природоохоронної політики. Вони є найбільш застосованими абстракціями, які дозволяють розглянути економічні взаємозв'язки в економічній системі з максимальною повнотою, на підставі об'ємного масиву статистичних даних. В якості застосування вказаного класу моделей можна вказати багаторівневу динамічну модель GEM-E3 [7], створену на замовлення Європейської комісії. Модель обчислює економічні наслідки емісійних обмежень за допомогою торгівлі дозволами на емісії парникових газів між країнами Європейського союзу та порівнює дані результати зі сценаріями скорочення викидів в умовах відсутності торгівлі квотами. К. Борінгер та Т. Разерфорд застосували прикладні моделі загальної рівноваги для оцінки економічного впливу від виконання емісійних зобов'язань Канадою [8]. Експерти Масачусетського інституту застосували даний вид моделей для оцінки економічних наслідків запровадження альтернативних обмежень на викиди у США на період 2008–2050 років.

Слід відзначити публікації вчених Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які досліджують питання оптимальності розподілу відповідальності в рамках скорочення викидів парникових газів на основі апарату нечітких множин та теорії прийняття рішень. Одним з основних недоліків більшості міжнародних угод про охорону навколишнього природного середовища є відсутність конкретних механізмів їх реалізації, в першу чергу, формалізованих правил розподілу відповідальності, зокрема, фінансової, яку можна з певною долею точності визначити. На основі даного прогнозу агенти угоди можуть приймати відповідне рішення про кооперацію. В розвиток запропонованих механізмів розподілу квот на думку авторів доцільно розглянути нечіткі постановки моделей розподілу колективних витрат, оскільки параметри, введені при формуванні індивідуальних потенційних доходів агентів є емпіричними, а значить неточними.

Метою статті є побудова окремого класу еколого-економічних моделей скорочення емісій парникових газів, що мають оптимізаційні моделі, що пов'язано з розробленістю їх математичного апарату. Серед них можна відзначити запропоновані математичні моделі багатовимірної, нелінійної і багатоекстремальної задачі оптимізації викидів промислових підприємств, з урахуванням обмежень на результуюче поле забруднення, розв'язання яких дозволяє визначити величини додаткових викидів без порушення екологічних вимог на рівень забруднення екологічно важливого регіону і тим самим збільшити кількість виробленої продукції або послуг.

В контексті даного підходу в [9] запропоновано еколого-економічну модель, що відображає сценарій оптимального розвитку з умовами обмежень на емісії парникових газів. Ця модель відображає задачу визначення такого варіанту валового випуску продукції, а також кінцевого споживання та витрат на екологічну складову, які забезпечать найбільше інтегральне споживання.

При цьому кожен виробник ідентифікується рівнянням відтворення основних виробничих потужностей в припущенні, що інвестиції повністю витрачаються без врахування запізнення на приріст основних виробничих потужностей та на амортизаційні відрахування при відомому рівні виробничих потужностей в базовому році.

Виробничі можливості задаються виробничою функцією, а весь валовий випуск продукції розподіляється на проміжне та кінцеве споживання (економічне та екологічне).

Екологічне обмеження на емісії парникових газів розглядається як різниця двох складових: обсягу викидів, який вважається пропорційним обсягу випущеного продукту з коефіцієнтом k та обсягу знищених забруднень, пропорційного величині екологічних витрат з коефіцієнтом n .

Нерівність $k < n$ є умовою екологічно ефективної економічної системи. А саме, означає такий рівень засвоєння екологічного споживання в частці валового випуску, який би дозволив виконувати емісійне обмеження за умов зростання обсягів валового випуску продукції.

В умовах посилення екологічних нормативів поставимо задачу дослідження такої еколого-економічної системи, в якій поряд з основним виробництвом діє допоміжне — зі знищення частини емісій парникових газів. Окрім того, в контексті необхідності подальшого скорочення емісій парникових газів, коли вичерпано власні ресурси (характерно, наприклад, для розвинутих економік) з огляду технологічних можливостей, фінансової доцільності тощо, залишається можливість такого скорочення за рахунок участі в механізмах торгівлі квотами, тощо. При цьому для кожної окремої країни розробляється власна національна стратегія їх реалізації. Об'єднуючим фактором є необхідність виділення частини прибутку та інвестування його в екологічні проекти агента-партнера. Змоделюємо динаміку розвитку економічного агента в даних умовах.

Матеріали і методи. Методологічною основою дослідження є системний підхід до аналізу еколого-економічної взаємодії, розвинутий у працях вітчизняних та зарубіжних вчених. При побудові та вивченні двохсекторної моделі використано методи теорії оптимізації, теорії оптимального керування, динамічних систем. Зважаючи на економічний характер дослідження, застосовано елементи економічної теорії, мікро-, макроекономіки, міжнародної економіки. Екологічна складова покликана необхідність застосування знань з основ екології, концепції сталого розвитку, охорони довкілля та природокористування.

Інформаційну базу дослідження складають аналітичні матеріали Верховної Ради України, Кабінету Міністрів України, Міністерства охорони навколишнього природного середовища України, Державного комітету статистики України науково-дослідних установ та вузів; монографічні дослідження та статті вітчизняних і зарубіжних авторів, матеріали науково-практичних конференцій, збірники, дані річних звітів, інформаційних та аналітичних бюлетенів, тижневиків, наукові дослідження та публікації розміщені в мережі Internet, методичні та аналітичні матеріали й документи міжнародних організацій ООН, міжурядових організацій ЮНЕП, ЮНЕСКО, ОЕСР, а також законодавчі та нормативні акти з питань політики охорони навколишнього природного середовища України та інших держав.

Виклад основного матеріалу. Як і в попередньому випадку, припускаємо, що розглядається ринок однорідного товару, на якому деяка сукупність незалежних виробників пропонує товар. Виробники діють в умовах досконалої конкуренції. Виробничі можливості сукупності виробників задаються величиною їх сумарної виробничої потужності M_1 — максимально можливим випуском продукту за одиницю часу. Аналогічним чином допоміжне виробництво характеризує показник потужності M_2 . Єдиним виробничим фактором є однорідна робоча сила R . Згідно неокласичній теорії виробництва будемо описувати технології і виробничі можливості економічної та екологічної складової виробничими функціями [10], які представляють залежність максимального рівня випуску від обсягів залучених факторів. При цьому матеріальне виробництво використовує наявні потужності M_1 та однорідну робочу силу R :

$$Y_1 = F_1(M_1, R),$$

а допоміжне — лише виробничі потужності:

$$Y_2 = F_2(M_2).$$

Враховуючи властивість лінійної однорідності, виробничі функції представимо у вигляді:

$$Y_1 = M_1 f_1(x_1), \quad x_1 = \frac{R}{M_1}, \quad f_1(x_1) = F_1(1, x_1);$$

$$Y_2 = M_2 f_2(1), \quad f_2(1) = F_2(1).$$

При цьому виконуються умови:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

$$f_1(x_1^*) = 1, \quad x_1^* = \frac{R^*}{M_1},$$

де R^* — повна зайнятість робочих місць на виробництві.

Виробники наймають робочу силу на ринку. Пропонує робочу силу населення, яке в той же час є основним споживачем продукту. Населення є однорідною групою споживачів та робітників. Споживчу поведінку населення описують монотонно зростаючою функцією корисності і C — попит на споживчий продукт.

Будемо вважати, що й виробники для своїх виробничих потреб проявляють попит на продукт величини J . Окрім введеного будемо розглядати екологічне обмеження, яке виражається в тому, що виробники не повинні перевищувати встановленої для них квоти емісій парникових газів: $Q \leq Q^s$.

В подальшому дослідженні враховується важлива властивість конкурентної ринкової рівноваги. Вона парето-оптимальна або економічно ефективна, т.т. в рівновазі повністю використовується робоча сила R , встановлена квота емісій Q^s та випущений валовий продукт Y . Звідси випливає, що рівновагу потрібно шукати серед парето-оптимальних розподілів ресурсів і продукту, а самій задачі про рівновагу можна поставити у відповідність задачу про оптимальний розподіл ресурсів. Для цього проведемо певні уточнення.

Пропозиція робочої сили змінюється у часі за експоненціальним законом:

$$R^s = R_0 e^{\lambda t}.$$

Випущений продукт може використовуватися як споживчий, так і фондоутворюючий для створення нових виробничих потужностей. Рівняння балансу виробництва та розподілу продукту запишемо у вигляді:

$$M_1 f_1(x_1) = J + S, \quad x_1 = \frac{R}{M_1}.$$

де J — обсяг фондоутворюючого продукту, S — обсяг кінцевого продукту (соціальна складова), R — обсяг використаної робочої сили.

При цьому загальний обсяг фондоутворюючого продукту спрямовується в економічний та екологічний сектори. Для кожного з них процес створення нової потужності описуємо сталими b_1 , b_2 — коефіцієнтами прирістної фондоемності. Якщо за одиницю часу створюється I_1 , I_2 одиниць нової потужності, то необхідно використовувати

$$J = b_1 I_1 + b_2 I_2$$

одиниць фондоутворюючого продукту.

Динаміка зміни потужностей основного та допоміжного виробництв у часі задається відповідними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= I_1 - \mu_1 M_1, \\ \frac{dM_2}{dt} &= I_2 - \mu_2 M_2 \end{aligned}$$

де μ_1 , μ_2 — коефіцієнти амортизації відповідних виробничих потужностей.

Соціальний продукт складається з кінцевого споживання C та екологічних витрат U , спрямованих на участь в альтернативних механізмах виконання емісійної квоти (в іншій інтерпретації можна розглядати як екологічний штраф або еквівалент продукції, що витрачається на штраф):

$$S = C + U.$$

Об'єднуючи вище введені співвідношення, отримуємо матеріальний баланс виробництва:

$$Y = b_1 I_1 + b_2 I_2 + C + U. \quad (1)$$

Введемо в розгляд норму інвестування $0 \leq u \leq 1$. Відповідно виконуються співвідношення: $J = uY$, $C = (1-u)Y$. Аналогічним чином розглядається норма інвестування в основні виробничі фонди матеріального виробництва $0 \leq u_1 \leq 1$: $b_1 I_1 = u_1 J$, $b_2 I_2 = (1-u_1)J$.

З огляду існування емісійного обмеження $Q^s = \text{const}$ (встановлена для виробника квота) необхідно ввести в розгляд екологічний баланс. Приріст об'ємів викидів парникових газів відбувається внаслідок діяльності основного виробництва, а зменшення — за рахунок утилізації допоміжним виробництвом та реалізації проектів в рамках інтернаціональних механізмів зменшення викидів. Будемо вважати, що обсяг емісій вуглекислого газу пропорційний валовому випуску продукції матеріального виробництва kY , а обсяг скорочених викидів за рахунок участі в проектах міждержавної співпраці пропорційний інвестованому в них частини валового випуску nU . При цьому виконується нерівність $k < n$, що є умовою екологічно ефективної економічної системи. А саме, означає такий рівень засвоєння екологічного споживання в частці валового випуску, який би дозволив виконувати емісійне обмеження за умов зростання обсягів валового випуску продукції. Таким чином, баланс емісій парникових газів запишемо у вигляді:

$$Q = k M_1 f_1 \left(\frac{R}{M_1} \right) - M_2 - nU \leq Q^s. \quad (2)$$

Система введених вище рівнянь допускає множину траєкторій зростання, які залежать від степеня використання робочої сили, емісійної квоти та розподілу продукту на фондоутворюючий, споживчий та екологічний. Серед траєкторій економічного зростання виділяють характерні траєкторії збалансованого експоненціального зростання. З метою відшукування таких траєкторій сформулюємо задачу оптимальної програми економічного зростання у вигляді:

$$\int_0^T \frac{C}{R} dt \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\frac{dM_1}{dt} = I_1 - \mu_1 M_1, \quad M_1(0) = M_{10}, \quad (4)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = I_2 - \mu_2 M_2, \quad M_2(0) = M_{20}, \quad (5)$$

$$Y = b_1 I_1 + b_2 I_2 + C + U, \quad (6)$$

$$kY - M_2 - nU = Q^s, \quad (7)$$

$$0 \leq R \leq R^s, \quad M_1 \geq 0, \quad M_2 \geq 0, \quad I_1 \geq 0, \quad I_2 \geq 0, \quad C \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$R^s(t) = R_0 e^{\lambda t}, \quad Q^s = \text{const}, \quad (9)$$

де

$$Y_1 = M_1 f_1\left(\frac{R}{M_1}\right).$$

Запропонована двосекторна еколого-економічна модель відображає максимізацію величини питомого споживання населення протягом планового періоду $[0, T]$ за умов виконання балансів основного та допоміжного виробництва, діяльність яких обумовлена динамікою відповідних їм потужностей.

Математично отримана модель (3)-(9) є задачею теорії оптимального керування [11]. З метою спрощення приведемо її до загальної постановки задачі оптимального керування. Для цього проведемо низку перетворень. З третього (6) та четвертого (7) рівнянь отримуємо:

$$C = \left(1 - \frac{k}{n}\right) M_1 f_1\left(\frac{R}{M_1}\right) - b_1 I_1 - b_2 I_2 + \frac{1}{n} M_2 + \frac{1}{n} Q^s.$$

Введемо нові змінні:

$$\rho_1 = \frac{M_1}{R^s}, \quad \rho_2 = \frac{M_2}{R^s}, \quad v = \frac{R}{R^s}.$$

У відносних змінних модель набуде вигляду:

$$\int_0^T \left(\left(1 - u - \frac{k}{n}\right) f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 + \frac{1}{n} \rho_2 \right) dt + \frac{1}{n} \int_0^T \omega^s dt \rightarrow \max,$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{u u_1}{b_1} f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_1) \rho_1,$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{u(1-u_1)}{b_2} f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_2) \rho_2,$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

З метою математичного дослідження застосуємо до отриманої задачі апарат теорії оптимального керування, а саме, принцип максимуму Понтрягіна [12]. Функція Гамільтона має вигляд:

$$H = \left(1 - u - \frac{k}{n}\right) f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 + \frac{1}{n} \rho_2 + p_1 \left(\frac{u u_1}{b_1} f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_1) \rho_1 \right) + p_2 \left(\frac{u(1-u_1)}{b_2} f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_2) \rho_2 \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{k}{n} + u \left(\left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1 + \frac{p_2}{b_2} - 1 \right) \right) f_1\left(\frac{v}{\rho_1}\right) \rho_1 + \frac{1}{n} \rho_2 - p_1 (\lambda + \mu_1) \rho_1 - p_2 (\lambda + \mu_2) \rho_2 \rightarrow \max_{u, u_1, v}.$$

Спряжені змінні задовольняють умовам:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad p(T) = 0$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = p_1(\lambda + \mu_1) - \left(1 - \frac{k}{n} + u \left(\left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1 + \frac{p_2}{b_2} - 1 \right) \right) \left(f_1 \left(\frac{v}{\rho_1} \right) - \left(\frac{v}{\rho_1} \right) f' \left(\frac{v}{\rho_1} \right) \right), \\ \frac{dp_2}{dt} = p_2(\lambda + \mu_2) - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Аналіз отриманої функції на досягнення максимуму приводить до таких висновків:

якщо $\left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1 + \frac{p_2}{b_2} - 1 > 0$, то $u = 1$, $v = 1$;

якщо $\left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1 + \frac{p_2}{b_2} - 1 \leq 0$, то $u = 0$, $v = 1$.

Отже,

$$1 - \frac{k}{n} + u \left(\left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1 + \frac{p_2}{b_2} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{p_2}{b_2} - \frac{k}{n} + \left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{p_2}{b_2} \right) u_1, & u = 1, \\ 1 - \frac{k}{n}, & u = 0. \end{cases}$$

Завдяки властивостям виробничої функції $f_1 \left(\frac{v}{\rho} \right)$ функція Гамільтона зростає по v . Тому на оптимальній траєкторії $v = 1$, що відповідає умові повної зайнятості.

Проаналізуємо гамільтоніан на предмет можливих значень керування u_1 . При цьому з огляду на попередньо отриманий результат нас буде цікавити випадок $u = 1$:

1. $u_1 = 1$ при $\frac{p_1}{b_1} > \frac{p_2}{b_2}$. Система фазових та двоїстих змінних буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{b_1} f_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right) \rho_1 - (\lambda + \mu_1) \rho_1, \\ \frac{d\rho_2}{dt} = -(\lambda + \mu_2) \rho_2, \\ \frac{dp_1}{dt} = p_1(\lambda + \mu_1) - \left(\frac{p_1}{b_1} - \frac{k}{n} \right) \left(f_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right) - \left(\frac{1}{\rho_1} \right) f' \left(\frac{1}{\rho_1} \right) \right), \\ \frac{dp_2}{dt} = p_2(\lambda + \mu_2) - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

2. $u_1 = 0$ при $\frac{p_1}{b_1} < \frac{p_2}{b_2}$. Відповідна система:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = -(\lambda + \mu_1) \rho_1, \\ \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{b_2} f_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right) \rho_1 - (\lambda + \mu_2) \rho_2, \\ \frac{dp_1}{dt} = p_1(\lambda + \mu_1) - \left(\frac{p_2}{b_2} - \frac{k}{n} \right) \left(f_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right) - \left(\frac{1}{\rho_1} \right) f' \left(\frac{1}{\rho_1} \right) \right), \\ \frac{dp_2}{dt} = p_2(\lambda + \mu_2) - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

3. На лінії перемикання $\frac{p_1}{b_1} = \frac{p_2}{b_2}$:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\hat{u}\hat{u}_1}{b_1} f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_1) \rho_1, \\ \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\hat{u}(1-\hat{u}_1)}{b_2} f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) \rho_1 - (\lambda + \mu_2) \rho_2, \\ \frac{dp_1}{dt} = p_1(\lambda + \mu_1) - \left(1 - \frac{k}{n} + u\left(\frac{p_2}{b_2} - 1\right)\right) \left(f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1}\right) f'\left(\frac{1}{\rho_1}\right)\right), \\ \frac{dp_2}{dt} = p_2(\lambda + \mu_2) - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Стаціонарна точка моделі визначається системою рівнянь $\frac{d\rho_1}{dt} = 0$, $\frac{d\rho_2}{dt} = 0$, $\frac{dp_1}{dt} = 0$, $\frac{dp_2}{dt} = 0$ при $\hat{u} = 1$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1 f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) = b_1(\lambda + \mu_1), \\ (1 - \hat{u}_1) f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) \rho_1 = b_2(\lambda + \mu_2) \rho_2, \\ f_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1}\right) f'\left(\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{\frac{b_1}{b_2} p_2}{1 - \frac{k}{n} + \left(\frac{p_2}{b_2} - 1\right)} (\lambda + \mu_1), \\ \frac{1}{n} = p_2(\lambda + \mu_2). \end{cases} \quad (10)$$

Отримана система дозволяє за відомим з четвертого рівняння p_2 визначити змінну ρ_1 з третього рівняння, що дає можливість отримати оптимальне керування $\hat{u}_1$ з першого та ρ_2 з другого рівнянь системи. А за відомим керуванням та фазовими змінними знайти максимум інтегрального кінцевого споживання (3) побудованої еколого-економічної моделі, а також обсяг валового випуску продукції основного та об'єми утилізованих викидів допоміжним виробництвом в умовах обмежень на емісії парникових газів.

Висновки. Необхідність вирішення проблеми зменшення антропогенного впливу на довкілля призвела до прийняття Паризької угоди, спрямованої на обмеження емісій парникових газів. Виконання її умов передбачає зростаючу роль заходів з екологічної політики, зокрема виділення окремого сектору в структурі національної економіки. Дослідження даної задачі на рівні математичного моделювання дозволило побудувати еколого-економічну модель, яка включає два види балансів: економічний (1) та екологічний (2), динаміку ресурсних змінних (4)–(5) та ставить своєю метою максимізацію кінцевого споживання (3). Проведений на основі апарату теорії оптимального керування аналіз, дозволив побудувати стаціонарні траєкторії (10) отриманої динамічної системи.

Побудова та дослідження описаної моделі проводилися, виходячи з умови про необхідність залучення додаткової квоти на викиди вуглекислого газу, що характерно для економік більшості промислово розвинутих країн. В той же час участь у Паризькій угоді ньому беруть також країни, які володіють надлишком дозволених емісій, що дає їм можливість отримати додаткові економічні ресурси. Цей факт потребує переходу на основі запропонованого підходу до відповідної еколого-економічної моделі зі зміною балансових співвідношень (1)–(2) та відображення цільового призначення отриманих додаткових трансфертів.

ДОДАТКОВА ІНФОРМАЦІЯ

ВНЕСОК АВТОРІВ: Усі автори зробили внесок порівну.

ФІНАНСУВАННЯ: Автори не отримували фінансування для цього дослідження.

ЗАЯВА ПРО ДОСТУПНІСТЬ ДАНИХ: Не застосовується.

КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ: Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. Agenda 21, 1992 United Nations Conference on Environment and Development. Rio de Janeiro (United Nations) A Conf. 151/4. URL: <http://www.un.org/documents/ga/docs/52/plenary/a52-175.htm> (дата звернення: 26.01.2026).
2. Kyoto Protocol to the United Nations Framework Convention on Climate Change. URL: http://unfccc.int/kyoto_protocol/items/2830.php (дата звернення: 27.01.2026).
3. The Paris Agreement. *United Nations*. URL: <https://unfccc.int/process-and-meetings/the-paris-agreement#:~:text=What%20is%20the%20Paris%20Agreement%3F&text=The%20Paris%20Agreement%20is%20a,force%20on%204%20November%202016> (дата звернення: 13.01.2026).
4. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. К.: Вища школа, 1999. 236 с.
5. Canes M. Economic Modeling of Climate Change Policy. Brussels: International Council for Capital Formation, 2002. 17 p.
6. Research on Output Growth Rates and Carbon Dioxide Emissions of the Industrial Sectors of EU-ETS: Final Report; Oxford Economic Forecasting. Oxford. 2006. 63 p.
7. Capros P. Climate Technology Strategies 2: The Macro-Economic Cost and Benefit of Reducing Greenhouse Gas Emissions in the European Union / P.Capros, P.Georgakopoulos, D.Van Regemorter, et. al; ZEW Economic Studies. Vol. 4. New York: Physica-Verlag Heidelberg, 1999. 224 p.
8. Boehringer C., Rutherford T. The Cost of Compliance: A CGE Assessment of Canada's Policy Options under the Kyoto Protocol. *World Economy*. 2009. Vol. 33, Is. 2. 211 p.
9. Ляшенко І. М., Онищенко А. М. Моделювання динамічної ринкової рівноваги в умовах обмежень на викиди парникових газів. *Науковий вісник Київського національного торгово-економічного університету, серія: економіка*. 2010.
10. Грабовецький Б. Є. Виробничі функції: теорія, побудова, використання в управлінні виробництвом. Монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2006. 137 с.
11. Lewis P., Draguna L., Vrabie L., Vassilis L., Syrmos L. Optimal Control: Wiley&Sons, Inc., 2012. 540 p.
12. Lawrence C. Evans. An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. University of California, Berkeley, 2017. 300 p.

References

1. United Nations. (1992). *Agenda 21: United Nations Conference on Environment and Development*.
2. United Nations. (1997). *Kyoto Protocol to the United Nations Framework Convention on Climate Change*.
3. United Nations. (2015). *The Paris Agreement*.
4. Liashenko, I. M. (1999). *Ekonomiko-matematychni metody ta modeli staloho rozvytku* [Economic-mathematical methods and models of sustainable development]. Vyshcha shkola. [in Ukrainian].
5. Canes, M. (2002). *Economic modeling of climate change policy*. International Council for Capital Formation.
6. Oxford Economic Forecasting. (2006). *Research on output growth rates and carbon dioxide emissions of the industrial sectors of EU-ETS: Final report*.
7. Capros, P., Georgakopoulos, P., Van Regemorter, D., et al. (1999). *Climate technology strategies 2: The macro-economic cost and benefit of reducing greenhouse gas emissions in the European Union* (ZEW Economic Studies, Vol. 4). Physica-Verlag Heidelberg.
8. Boehringer, C., & Rutherford, T. (2009). The cost of compliance: A CGE assessment of Canada's policy options under the Kyoto Protocol. *The World Economy*.
9. Liashenko, I. M., & Onyshchenko, A. M. (2010). Modeliuvannia dynamichnoi rynkovoї rovnovahy v umovakh obmezhen na vykydy parnykovykh haziv [Modeling of dynamic market equilibrium under greenhouse gas emission constraints]. *Naukovyi visnyk KNTEU*. [in Ukrainian].
10. Hrabovetskyi, B. Ye. (2006). *Vyrobnychi funktsii: teoriia, pobudova, vykorystannia v upravlinni vyrobnytstvom* [Production functions: Theory, construction, and application in production management]. Universum. [in Ukrainian].
11. Lewis, P., Draguna, L., Vrabie, L., Vassilis, L., & Syrmos, V. (2012). *Optimal control*. Wiley & Sons.
12. Evans, L. C. (2017). *An introduction to mathematical optimal control theory*. University of California, Berkeley.

Дата першого надходження статті до видання: 11.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 17.03.2026

Дата публікації: 27.03.2026

Onyshchenko Andrii

*Doctor of Economic Sciences, Professor
Department of Information Systems and
Technologies
Taras Shevchenko National University of Kyiv*

Ostapenko Oleksandr

*Candidate of Economic Sciences, Associate
Professor
Department of Financial Support for the
Troops
Military Institute of Taras Shevchenko
National University of Kyiv*

TWO-SECTOR ECOLOGICAL AND ECONOMIC MODEL OF OPTIMAL DEVELOPMENT IN THE CONDITIONS OF REDUCING GREENHOUSE GAS EMISSIONS

Summary. Introduction. The modern stage of global economic development is characterized by increasing attention to climate change and the growing anthropogenic impact on the environment. The main cause of global warming is recognized as the excessive concentration of greenhouse gases in the atmosphere, which necessitates the development of effective mechanisms for their reduction. Climate change leads to extreme weather events, degradation of natural resources, and reduced economic efficiency.

The international community responds to these challenges through global agreements such as the Kyoto Protocol and the Paris Agreement, which impose emission constraints. Their implementation requires effective economic mechanisms that balance economic growth and environmental sustainability.

In this context, ecological and economic modeling becomes increasingly important as it enables the formalization of interactions between economic activity and environmental processes. Existing approaches, including input-output, energy, and macroeconomic models, have limitations in capturing the full complexity of these interactions.

Therefore, there is a need to develop models that simultaneously account for production dynamics, environmental constraints, and policy instruments. A two-sector ecological and economic model provides such a framework by integrating production and environmental protection activities.

Purpose. The purpose of the study is to develop a two-sector ecological and economic model of optimal development under greenhouse gas emission constraints. The study aims to formalize the relationship between economic growth and environmental limitations.

The model integrates material and ecological balances within a unified dynamic framework. It also formulates an optimal control problem aimed at maximizing integral consumption.

An additional objective is to analyze stationary and turnpike trajectories of economic development. The results are intended to support the design of effective environmental and economic policies.

Materials and Methods. The methodological basis of the study is a systemic approach to ecological and economic analysis. The research employs economic and mathematical modeling methods, including optimal control theory and dynamic systems.

The core of the study is a two-sector model consisting of a main production sector and an auxiliary emission abatement sector. Production processes are described using neoclassical production functions.

The system dynamics are represented by differential equations describing capital accumulation, output, and emissions. The optimization problem is formulated as maximizing integral consumption over time.

The Pontryagin Maximum Principle is used to derive optimality conditions. The study is based on scientific publications, statistical data, and materials from international organizations.

Results. The article develops a two-sector ecological and economic model of optimal development under greenhouse gas emission constraints. The model integrates a material balance of production and distribution with an ecological balance reflecting emission generation and reduction. The economic system consists of a main production sector and an auxiliary sector responsible for emission abatement. Output is allocated among consumption, capital formation, and environmental expenditures, including investments in international emission reduction mechanisms and quota trading frameworks.

The dynamics of the system are described through differential equations governing capital accumulation in both sectors, labor supply growth, and emission constraints. The environmental restriction is formalized as a proportional relationship between gross output and emissions, reduced by abatement activities and external ecological investments. The condition of ecological efficiency ensures compliance with the established emission quota while maintaining positive economic growth.

The optimal development trajectory is formulated as an optimal control problem aimed at maximizing integral per capita consumption over the planning horizon. The Pontryagin Maximum Principle is applied to derive necessary optimality conditions and analyze the Hamiltonian structure of the system. The existence of stationary and turnpike trajectories is demonstrated, revealing balanced exponential growth paths consistent with emission limits.

Special attention is devoted to the case where domestic technological and financial capacities are insufficient for further emission reductions, making participation in international quota mechanisms essential. The proposed framework provides a formalized basis for analyzing the trade-off between economic growth and environmental policy instruments. The results contribute to the theoretical foundation of ecological and economic modeling and offer analytical tools for designing sustainable development strategies consistent with the objectives of the Paris Agreement.

Discussion. Future research may focus on extending the model to include international emission trading mechanisms. Incorporating uncertainty and fuzzy modeling approaches is also actual.

Further development may involve multi-sector extensions and empirical calibration using real-world data. The model can be applied to support national sustainable development strategies.

Key words: ecological and economic modeling, optimal control theory, greenhouse gas emissions, Paris Agreement, turnpike trajectories.